Thermodynamique galiléenne des milieux continus

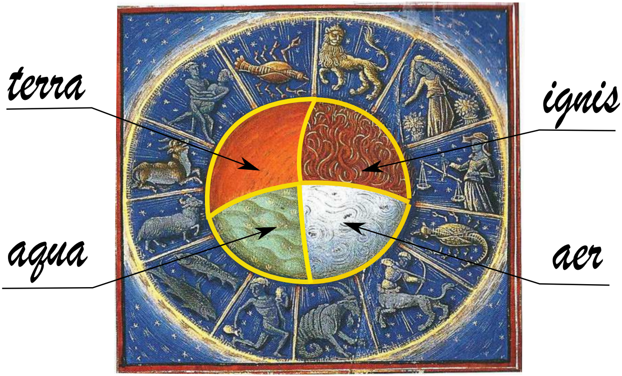
G. de Saxcé

$5^{ème}$ Ecole d'Eté de Mécanique Théorique de Quiberon

Mécanique et Thermodynamique galiléenne des milieux continus (3/4)

Quiberon, 11-17 septembre 2016

Thermodynamique galiléenne des milieux continus



Plan de l'exposé

Débat d'idées

- On prend la Relativité comme modèle, procédé qualifié de "géométrisation" mais avec le groupe de symétrie de Galilée
- On ajoute à l'espace-temps une cinquième dimension liée à l'action
- L'**entropie** se généralise sous la forme d'un quadrivecteur et la **température** sous la forme d'un pentavecteur
- On généralise le tenseur d'**énergie-impulsion** en lui associant la "masse"
- On décompose le nouvel objet en parties réversible et dissipative
- On obtient une écriture covariante et plus compacte des 1^{er} and $2^{ème}$ principes

La cinquième dimension...

Figure: Simulateur 5D (La Foux, Saint-Tropez)

Transformations Bargmanniennes

- L'espace-temps $\mathcal{M}$ est plongé dans un espace $\hat{\mathcal{M}}$ de dimension 5: $\mathcal{M} \to \hat{\mathcal{M}} \,:\, \boldsymbol{X} \mapsto \hat{\boldsymbol{X}} = \hat{f}\,(\boldsymbol{X})$
- On construit un groupe de transformations affines $\hat{X}' \mapsto \hat{X} = \hat{P}\,\hat{X}' + \hat{C}$ of $\mathbb{R}^5$ qui sont galiléennes quand elles agissent sur l'espace-temps, donc de la forme

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} P & 0 \\ \Phi & \alpha \end{pmatrix} \,,$$

  où P est galiléenne, Φ and α ont une signification physique liée à l'action
- Nous savons que, sous l'action d'un boost u et d'une rotation R, l'énergie cinétique se transforme suivant

$$e = \frac{1}{2}\, m \parallel u + R\, v' \parallel^2 = \frac{1}{2}\, m \parallel u \parallel^2 + m\, u \cdot (R\, v') + \frac{1}{2}\, m \parallel v' \parallel^2 \;.$$

Transformations Bargmanniennes

- Nous affirmons que la cinquième dimension est liée à l'action par

$$dz = \frac{e}{m}\, dt = \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 dt' + u^T R\, dx' + dz'$$

ce qui conduit à considérer les **transformations Bargmanniennes** de $\mathbb{R}^5$ dont la partie linéaire est

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & R & 0 \\ \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 & u^T R & 1 \end{pmatrix}$$

Leur ensemble est le **groupe de Bargmann**,
un groupe de Lie de dimension 11,
introduit en Mécanique quantique pour des raisons cohomologiques
mais qui se révèle très utile en Thermodynamique !

Pentavecteur température

- La température réciproque $\beta = 1 \,/\, \theta = 1 \,/\, k_B T$ se généralise sous la forme d'un pentavecteur Bargmannien

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} W \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ w \\ \zeta \end{pmatrix} ,$$

- La règle tensorielle $\hat{W}' = \hat{P}^{-1} \hat{W}$ conduit à

$$\beta' = \beta \,, \quad w' = R^T (w - \beta u), \quad \zeta' = \zeta - w \cdot u + \frac{\beta}{2} \parallel u \parallel^2$$

- Choisissant $u = w \,/\, \beta$, on obtient la **forme réduite**

$$\hat{W}' = \begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ \zeta_{int} \end{pmatrix}$$

interprétée comme le vecteur température de l'élément de volume **au repos**

Pentavecteur température

Méthode du boost :
Partant de la forme réduite, on applique une transformation geliléenne de boost v, ce qui donne :

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} \beta \\ w \\ \zeta \end{pmatrix} ,= \begin{pmatrix} \beta \\ \beta\, v \\ \zeta_{int} + \frac{\beta}{2} \parallel v \parallel^2 \end{pmatrix} .$$

où ζ est le **potentiel de Planck** (ou **potentiel de Massieu**)

Tenseur friction

Friction tensor

Le **tenseur friction** est un tenseur mixte 1 fois covariant et 1 fois contravariant

$$\boldsymbol{f} = \nabla\, \vec{\boldsymbol{W}}$$

representé par la matrice 4×4 : $f = \nabla\, W$

- Cet objet introduit par Souriau mélange le gradient de température et la vitesse de déformation
- En dimension 5, on peut aussi introduire

$$\hat{\boldsymbol{f}} = \nabla\, \hat{\vec{\boldsymbol{W}}}$$

représenté par une matrice 5×4

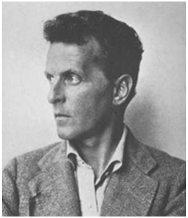
$$\hat{f} = \nabla\, \hat{W} = \begin{pmatrix} f \\ \nabla\, \zeta \end{pmatrix}$$

Tenseur moment

Méthode

Avec le soucis d'**arpenter le sol rugueux de la réalité** (Wittgenstein),

on veut travailler, en dimension 4 ou 5, avec des tenseurs dont la règle tensorielle respecte la Physique



La signification de leurs composantes n'est pas donnée *a priori* mais résulte, à travers la règle tensorielle, du choix du groupe de symétrie

Tenseur moment

Tenseur moment

Application linéaire de l'espace tangent à $\hat{\mathcal{M}}$ en $\hat{\boldsymbol{X}} = \hat{f}\,(\boldsymbol{X})$ dans l'espace tangent à $\mathcal{M}$ en $\boldsymbol{X}$, donc un **tenseur mixte** $\hat{\boldsymbol{T}}$ d'ordre 2

- **Tenseur moment galiléen :** représenté par une matrice 4×5 de la forme :

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & -p^T & \rho \\ k & \sigma_\star & p \end{pmatrix}$$

où $\sigma_\star$ est une matrice 3×3

- Sous forme matricielle, la règle tensorielle s'écrit :

$$\hat{T}' = {\color{green}P}\ \hat{T}\ {\color{red}\hat{P}^{-1}}$$

Pour révéler la signification physique des composantes ...

Tenseur moment

... nous laissons agir le groupe de symétrie !

- La règle tensorielle donne :

$$\rho' = \rho \;, \quad p' = R^T \, (p - \rho u), \quad \sigma'_\star = R^T \, (\sigma_\star + u \, p^T + p \, u^T - \rho \, u \, u^T) \, R$$

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} - u \cdot p + \frac{\rho}{2} \parallel u \parallel^2, \quad k' = R^T \, (k - \mathcal{H}' u + \sigma_* u + \frac{1}{2} \parallel u \parallel^2 p)$$

- qui conduit à la **forme réduite** :

$$\hat{T}' = \begin{pmatrix} \rho \, e_{int} & 0 & \rho \\ h' & \sigma' & 0 \end{pmatrix} ,$$

interprétée comm le moment d'un volume élémentaire **au repos**

Tenseur moment

Méthode du boost : Partant de la forme réduite, nous appliquons une transformation galiléenne de boost v et de rotation R puis nous interprétons :

- ρ comme la **densité**
- $p = \rho\, v$ comme la **quantité de mouvement**
- $\sigma_\star = \sigma - \rho v v^T$ comme les **contraintes dynamiques**
- $\mathcal{H} = \rho\, (e_{int} + \frac{1}{2} \parallel v \parallel^2)$ comme l'**énergie totale**
- $k = h + \mathcal{H} v - \sigma v$ comme le **flux d'énergie**

avec :

- le **flux de chaleur** $h = R\, h'$
- les **contraintes statiques** $\sigma = R\, \sigma'\, R^T$

Tenseur moment

La **méthode du boost** révèle ainsi la forme standard d'un

Tenseur moment galiléen

Objet structuré en :

- **densité** ρ,
- **quantité de mouvement** p,
- **contraintes statiques de Cauchy** σ,
- **flux de chaleur** h,
- **Hamiltonien** (par unité de volume) $\mathcal{H}$

représenté par une matrice :

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{H} & -p^T & \rho \\ h + \mathcal{H}\,\dfrac{p}{\rho} - \sigma\,\dfrac{p}{\rho} & \sigma - \dfrac{1}{\rho}\,p\,p^T & p \end{pmatrix}$$

Premier principe

Divergence du moment

Pentaligne $Div\ \hat{T}$ telle que, pour tout champ de pentavecteur $\hat{W}$:

$$Div\ (\hat{T}\ \hat{W}) = (Div\ \hat{T})\ \hat{W} + Tr\ \left(\hat{T}\ \nabla\ \hat{W}\right)$$

Forme covariante du 1^{er} principe

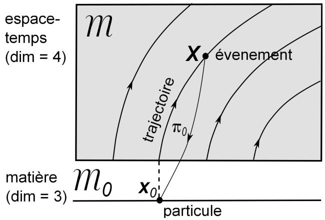
$$Div\ \hat{T} = 0$$

Premier principe

En l'absence de gravité, on retrouve les équations de conservation de :

- la masse : $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + div\,(\rho\, v) = 0$
- la quantité de mouvement : $\rho \left[\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\, v \right] = (div\ \sigma)^T \quad ,$
- l'énergie : $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + div\ \ (h + \mathcal{H} v - \sigma v) = 0$

Premier principe



Modélisation de la matière et de son mouvement par un fibré de lignes $\pi_0 : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_0$

- Une particule matérielle $\boldsymbol{x}_0 = \pi_0(\boldsymbol{X})$ est représentée par $s' \in \mathbb{R}^3$
- son mouvement est déterminé par l'application

$$(t, x) \mapsto s' = \kappa(t, x)$$

  qui identifie la particule de position x à l'instant t
- s' étant un invariant du mouvement : $\frac{ds'}{dt} = \frac{\partial s'}{\partial t} + \frac{\partial s'}{\partial x}\frac{dx}{dt} = 0$
  soit $\frac{\partial s'}{\partial X}\ U = 0$

Premier principe

Milieu réversible

Si ζ est une fonction des déformations de Cauchy à droite $C = F^T F$, du vecteur température W et des coordonnées lagrangiennes s', alors la matrice 4×4

$$T_R = U \, \Pi_R + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sigma_R v & \sigma_R \end{pmatrix}$$

avec $\Pi_R = -\rho \, \frac{\partial \zeta}{\partial W}$ $\quad \sigma_R = -\frac{2\rho}{\beta} \, F \, \frac{\partial \zeta}{\partial C} \, F^T$ est telle que :

- ♢ $Tr \left(\hat{T}_R \nabla \hat{W} \right) = 0$
- ♡ $T_R \; U = -\rho \left(\frac{\partial \zeta}{\partial W} \; U \right) \; U$,
- ♠ $\hat{T}_R = \begin{pmatrix} T_R & N \end{pmatrix}$ avec $N = \rho \, U$ représente un tenseur moment $\hat{\boldsymbol{T}}_R$
- ♣ $\hat{T}_R \; \hat{W} = \left(\zeta - \frac{\partial \zeta}{\partial W} \; W \right) \; N$

Premier principe

ζ est le prototype des **potentiels thermodynamiques** :

- l'**énergie interne** $e_{int} = -\dfrac{\partial \zeta_{int}}{\partial \beta}$
- l'**entropie spécifique** $s = \zeta_{int} - \beta \, \dfrac{\partial \zeta_{int}}{\partial \beta}$ dont le quadrivecteur galiléen $\vec{\boldsymbol{S}} = \hat{\mathbf{T}}_R \, \hat{\vec{\boldsymbol{W}}}$ est le quadriflux
$$\vec{\boldsymbol{S}} = s \, \vec{\boldsymbol{N}}$$
- l'**énergie libre** $\psi = -\dfrac{1}{\beta} \, \zeta_{int} = -\theta \, \zeta_{int}$ qui permet de retrouver
$$-e_{int} = \theta \, \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \psi, \qquad -s = \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$$

L'intérêt du potentiel de Planck ζ est qu'il génère tous les autres

Second principe

Décomposition additive du tenseur moment

$\hat{\mathbf{T}} = \hat{\mathbf{T}}_R + \hat{\mathbf{T}}_I$ avec

- la partie réversible $\hat{\mathbf{T}}_R$ représentée par :

$$\hat{T}_R = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_R & -p^T & \rho \\ \mathcal{H}_R v - \sigma_R v & \sigma_R - v\, p^T & \rho v \end{pmatrix}$$

- la partie dissipative $\hat{\mathbf{T}}_I$ représentée par :

$$\hat{T}_I = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_I & 0 & 0 \\ h + \mathcal{H}_I v - \sigma_I v & \sigma_I & 0 \end{pmatrix}$$

où σ_I sont les **contraintes dissipatives** et $\mathcal{H}_I = -\rho q_I$ est la partie dissipative de l'énergie due aux **sources de chaleur irréversibles** q_I

On déduit alors du premier principe l'**équation de la chaleur** :

$$\rho\, c_v \frac{d\theta}{dt} = \theta \ Tr \ \left(\frac{\partial \sigma_R}{\partial \theta} D \right) + Tr \ (\sigma_I \, D) - div \ h + \rho \ \frac{dq_I}{dt}$$

Second principe

Flèche du temps

Forme linéaire $e^0 = dt$ représentée par une ligne invariante par transformations galilénnes

$$e^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Forme covariante du second principe

La **production locale d'entropie** du milieu caractérisé par un vecteur température $\hat{\vec{W}}$ et un tenseur moment $\hat{\mathbf{T}}$ est positive :

$$\boxed{\Phi = Div\ \left(\hat{T}\ \hat{\vec{W}}\right) - \left(e^0(f(\vec{U}))\right)\ \left(e^0(T_l(\vec{U}))\right) \geq 0}$$

et s'annulle si et seulement si le processus est réversible
[de Saxcé & Vallée IJES 2012]

Second principe

- La production locale d'entropie

$$\Phi = \boldsymbol{Div}\ \left(\hat{\boldsymbol{T}}\ \hat{\vec{\boldsymbol{W}}}\right) - \left(\boldsymbol{e}^0(\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{U}}))\right)\ \left(\boldsymbol{e}^0(\boldsymbol{T}_I(\vec{\boldsymbol{U}}))\right)$$

est un **invariant galiléen !**

Production locale d'entropie

Si le tenseur moment est de divergence nulle, la production d'entropie prend la forme :

$$\Phi = h \cdot grad\, \beta + \beta\ Tr\ (\sigma_I\ D) \geq 0$$

où interviennent les **affinités thermodynamiques** $a = grad\ \beta$, $A = \beta\, D$ et les **flux thermodynamiques** correspondants h, σ_I.

- Après quelques calculs, elle peut être mise sous la forme classique de l'**inégalité de Clausius-Duhem**

$$\Phi = \rho\ \frac{ds}{dt} - \frac{\rho}{\theta}\ \frac{dq_I}{dt} + div\ \left(\frac{h}{\theta}\right) \geq 0$$

Un parfum de Thermodynamique relativiste

- Revenons au modèle relativiste avec le groupe de symétrie de **Lorentz-Poincaré**

- Dans cette approche, la température est transformée suivant

$$\theta' = \frac{\theta}{\gamma} = \theta \sqrt{1 - \frac{\| v \|^2}{c^2}}$$

C'est la **contraction des températures** !

- grâce à la métrique de Minkowski de l'espace-temps $ds^2 = c^2 dt^2 - \| dx \|^2$, on peut associer à la quadrivitesse $\vec{\boldsymbol{U}}$ une et une seule forme linéaire $\boldsymbol{U}^*$ représentée par

$$U^T G = \left(\gamma, \gamma\, v^T\right) \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & -1_{\mathbb{R}^3} \end{pmatrix} = c^2 \left(\gamma, -\frac{1}{c^2}\gamma\, v^T\right) ,$$

qui tend vers $c^2 e^0$ quand c tend vers $+\infty$

Un parfum de Thermodynamique relativiste

Sur cette base, on remplace $\boldsymbol{e}^0$ par $\boldsymbol{U}^* / \, c^2$ dans l'expression galiléenne du $2^{ème}$ principe, ce qui conduit à

Forme relativiste du $2^{ème}$ principe

La **production locale d'entropie** du milieu caractérisé par un vecteur température $\vec{\mathbf{W}}$, un tenseur moment $\mathbf{T}$, un potentiel ζ et un quadriflux de masse $\vec{\boldsymbol{N}}$ est positive :

$$\boxed{\Phi = \boldsymbol{Div} \, \left(\boldsymbol{T} \, \vec{\boldsymbol{W}} + \zeta \, \vec{\boldsymbol{N}} \right) - \frac{1}{c^2} \left(\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{U}})) \right) \frac{1}{c^2} \left(\boldsymbol{U}^*(\boldsymbol{T}_I(\vec{\boldsymbol{U}})) \right) \geq 0}$$

et s'annulle si et seulement si le processus est réversible

Thermodynamique et gravitation galiléenne

Le dessous des cartes ...

- Le groupe de Galilée ne conserve pas une métrique de l'espace-temps
- Le groupe de Bargmann conserve la métrique $ds^2 = \| dx \|^2 - 2\, dz\, dt$, donc l'espace $\hat{\mathcal{M}}$ est une variété riemanniennienne et, dans ce cas, la G-structure n'est en général pas intégrable, l'obstruction étant la courbure
- En d'autres termes, nous travaillons, jusqu'ici, dans des bases qui ne sont pas associées à des coordonnées locales (repères mobiles)
- Nous devons donc trouver des repères associées à des coordonnées (repères naturels)

Merci !

Thermodynamique et gravitation galiléenne

- Avec les **potentiels de la gravitation galiléenne** ϕ, A tels que

$$g = -grad\,\phi - \frac{\partial A}{\partial t}, \quad \Omega = \frac{1}{2}\,curl\,A$$

le Lagrangien est $\mathcal{L}(t, x, v) = \frac{1}{2}\,m \parallel v \parallel^2 - m\,\phi + m\,A \cdot v$

- ce qui suggère d'introduire le changement de coordonnées

$$dz' = \frac{\mathcal{L}}{m}\,dt = dz - \phi\,dt + A \cdot dx\ , \quad dt' = dt, \quad dx' = dx$$

- Dans les nouvelles coordonnées, la **connexion Bargmannienne** (connexion de Levi-Civita pour la métrique $ds^2 = \parallel dx \parallel^2 - 2\,dz\,dt$) est

$$\hat{\Gamma}(d\hat{X}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ j(\Omega)\,dx - g\,dt & j(\Omega)\,dt & 0 \\ \begin{matrix} \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial t} - A \cdot g\right)\,dt \\ +\,(grad\,\phi - \Omega \times A) \cdot dx \end{matrix} & \begin{matrix} [(grad\,\phi - \Omega \times A)\,dt \\ -grad_s A\,dx]^T \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}$$

Thermodynamique et gravitation galiléenne

Les développements sont similaires à ceux en absence de gravitation mais avec quelques entorses :

- le potentiel de Planck devient $\zeta = \zeta_{int} + \frac{\beta}{2} \parallel v \parallel^2 - \beta\, \phi + A \cdot w$
- le Hamiltonien devient $\mathcal{H} = \rho\, \left(e_{int} + \frac{1}{2} \parallel v \parallel^2 + \phi - q_I \right)$,
- la quantité de mouvement devient $p = \rho\,(v + A)$.

En présence de gravitation, le premier principe restitue les équations de conservation de la masse et de

- la quantité de mouvement : $\rho\, \dfrac{dv}{dt} = (div\ \sigma)^T + \rho\, (g - 2\, \Omega \times v)$
- l'énergie : $\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + div\ \ (h + \mathcal{H} v - \sigma v) = \rho \left(\dfrac{\partial \phi}{\partial t} - \dfrac{\partial A}{\partial t} \cdot v \right)$